

Le théorème de Godel

A. LEFIEUX, M. BRIGNOLLE, J. MATHE

20 décembre 2005

Plan

- 1 Biographie de K. Gödel
- 2 La démonstration
- 3 Ouvertures et conséquences philosophiques.

Répercussions sur la pensée philosophique moderne

- Importantes répercussions sur la philosophie moderne
- La vérité peut elle être exprimée en terme de démontrabilité ?
- Chose prouvable nécessairement vraie ?
- Chose vraie nécessairement prouvable ?

Les pièges liés au théorème de Godel

- Gödel a montré que l'on ne peut rien prouver en mathématiques !
- D'après le théorème de Gödel, on peut donc prouver que la bible ou les textes de lois sont nécessairements inconsistants.
- ...
- Conclusion : il faut bien garder à l'esprit que le théorème de Godel s'applique exclusivement aux systèmes formels

Lecture du texte

- Une note de lecture par J.L. Le Moigne du texte “Le théorème de Gödel.” Par K Gödel
- Bourbakisme : mouvement de ce siècle visant à formaliser, sur les pas de Hilbert, la mathématique
- Le théorème de Godel remet il en place tout ce mouvement “d’ultra implacabilité” des mathématiques et de la formalisation à outrance née avec les courants matérialistes ?

La remise en cause de l'implacabilité

- Depuis les principia mathematica, la mathématique est considérée comme la reine des sciences.
- Remise en cause de la transcendance de la mathématique
- La mathématique n'est donc remise au rang des sciences "classiques" elle n'a donc aucune prétention à être plus véritable que les sciences molles, que la physique quantique etc.
- Il y a une limite au formalisme et la représentation de cette connaissance ne peut être qu'incomplète.
- Il ne faut pas sombrer dans la facilité de dire que la mathématique n'a plus aucune valeur. Elle perd juste le rang de "reine des sciences".
- Il n'exclut pas la possibilité d'une démonstration métamathématique de la consistance de l'arithmétique.

Le cerveau : un système formel ?

- Beaucoup de cognitivistes pensent à de nouvelles conceptions du cerveau, comme celle d'une machine à états ou d'un système formel.
- Peut-on considérer le cerveau humain comme un système formel ?
- Si oui, le théorème de Godel peut-il s'appliquer dessus ?
- Aptitude à prendre du recul sur soi-même.

Qu'en est il de l'existence de Dieu ?

Voici la Preuve ontologique de Gödel, c'est-à-dire la preuve mathématique de l'existence de Dieu (cf wikipédia) :

- 1 Axiome 1. (Dichotomie) Une propriété est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- 2 Axiome 2. (Fermeture) Une propriété est vraie si elle contient nécessairement une propriété vraie.
- 3 Théorème 1. Une propriété vraie est logiquement consistante (c'est-à-dire qu'il est possible de trouver au moins un exemple)
- 4 Définition. Quelque chose est semblable à Dieu si et seulement si il contient toutes les propriétés vraies.
- 5 Axiome 3. Être semblable à Dieu est une propriété vraie.

Qu'en est il de l'existence de Dieu ?

- 1 Axiome 4. Être une propriété vraie est (logique, donc) nécessaire.
- 2 Définition. Une propriété P est l'essence de x si et seulement si x possède P et P est nécessairement minimale.
- 3 Théorème 2. Si x est semblable à Dieu, alors être semblable à Dieu est l'essence de x .
- 4 Définition. $NE(x)$: x existe nécessairement s'il a une propriété essentielle.
- 5 Axiome 5. Être NE est être semblable à Dieu.

Qu'en est il de l'existence de Dieu ?

- 1 Théorème 3. Il existe nécessairement x tel que x est semblable à Dieu.

Cette démonstration mathématique datant de 1970 provoqua un vif émoi chez les mathématiciens et logiciens, qui n'étaient pas pour autant capables d'expliquer tous les aspects de cette preuve. Il est peut-être même impossible de comprendre une preuve aussi abstraite, qui est donc à prendre avec précaution.

By design ?

- Godel, comme beaucoup d'hommes de science (Descartes, Leibniz...) a tenté de prouver l'existence de Dieu
- Preuve de l'argument from design (pourquoi les choses sont si belles ?) ?
- de tous temps l'homme a pris du recul et a expliqué les choses

Qu'en est il de l'existence de Dieu ?

- Beaucoup de choses restent inexpliquées (pourquoi ?)
- Godel montre-t-il que Dieu n'est autre que le niveau méta ultime ?
- Peu de science éloigne de Dieu, trop de science en rapproche [Blaise Pascal]

Conclusion

Conclusion

Il ne faut pas tomber dans la facilité de penser que le théorème de l'incomplétude de Godel détruit tout ce que les mathématiques ont construit jusqu'ici. Il ne faut pas non plus sombrer dans la facilité en disant que la Mathématique n'a plus rien à prouver aux autres sciences et qu'elle n'est plus viable. Le théorème de Godel s'applique aux systèmes formels exclusivement. !

Questions ?